

К ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ ОБРАТНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПОЛНОЙ РАЗГРУЗКЕ

В роботі розглядається задача із розрахунку деформацій повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів при стаціонарному навантаженні і при повному розвантаженні. Розв'язок отримано на основі гіпотези подібності ізохронних діаграм повзучості і діаграми миттєвого деформування. Режим навантаження задаються за допомогою функції Хевісайда. Результати розрахунків експериментально апробовані на задачах із розрахунку деформацій повзучості полівінілхлоридного пластику, ПТФЕ, нейлону FM 10001 і плексигласу.

The problem of the calculation of creep strains of non-linear viscoelastic materials under constant stresses and full unloading is considered. The solution is based on the realization of the similarity condition of the isochronous creep diagrams and the momentary deformation diagram. The loading behaviours are given by the Heviside's function. The results has been approved experimentaly on the calculation problem of creep strains as an example of polyvinylchloride elastron, fluoroplastic, nylon FM 10001 and plexiglass.

Наиболее характерными для реальных условий эксплуатации большинства деталей машин и механизмов являются переменные режимы нагружения, одним из таких режимов является режим нагружения постоянной нагрузкой с последующим снятием этой нагрузки. При этом наблюдается явление обратной ползучести.

Особый практический интерес заслуживает задача расчета процесса обратной ползучести, по данным простых, легко воспроизводимых экспериментов на ползучесть при стационарном нагружении.

Решению данной задачи посвящено много работ [1-5, 8], в ходе анализа которых установлено, что наиболее точно описывают процессы деформирования при нестационарных режимах нагружения модели наследственного типа, поскольку в них учитывается история нагружения материала. Среди моделей наследственного типа наиболее перспективной представляется модель, основанная на гипотезе единой изохронной диаграммы ползучести [7, 8], включающей диаграмму мгновенного деформирования как изохрону для нулевого момента времени. На основе этой модели в данной работе решается задача расчета деформаций нелинейной ползучести нескольких полимерных материалов в режиме полной разгрузки, при этом в качестве базовых экспериментов используются эксперименты на растяжение и на ползучесть при стационарном нагружении.

1. Постановка задачи исследования. Объект исследования.

Исходя из гипотезы единой изохронной диаграммы ползучести [7, 8], зависимость между деформацией, напряжением и временем можно представить в виде

$$\varphi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon(t)$ – полная деформация, включающая упругую ε^e и вязкоупругую $\varepsilon^c(t)$ составляющие;

$\sigma(t)$ – действующее напряжение в момент времени t ; $\varphi_0(\cdot)$ – функция, задающая диаграмму мгновенного деформирования, $K(t-\tau)$ – ядро ползучести; λ – реологический параметр ($\lambda > 0$);

t – время наблюдения; τ – время, предшествующее времени наблюдения t .

Нелинейность процессов ползучести заданных уравнением (1.1) определяется видом функции $\varphi_0(\cdot)$, которая в работе задается с помощью сглаживающих кубических сплайнов вида

$$\varphi_0(\varepsilon) = a_0 + a_{1,j}\varepsilon + a_{2,j}\varepsilon^2 + a_{3,j}\varepsilon^3, \quad (1.2)$$

где $a_0, a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}$ – коэффициенты сплайна, которые определяются из условия непрерывности первой производной в точках ε_j и ε_{j+1} и краевых условий на концах отрезка, задающего аппроксимирующую функцию.

Ядро наследственности в (1.1) выбирается в форме дробно-экспоненциальной функции [2], задается соотношением

$$K(t - \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{\alpha + (1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.3)$$

где α и β – параметры дробно-экспоненциального ядра причем $-1 < \alpha < 0$, а $\beta > 0$.

Параметры α и β дробно-экспоненциального ядра, а также реологический параметр λ в уравнении (1.1) определяются по результатам обработки экспериментальных данных на одноосную ползучесть при фиксированной температуре и при нескольких уровнях постоянных напряжений.

Нагружение при реализации режима полной разгрузки задается в виде

$$\sigma(t) = \sigma_k h(t) - \sigma_k h(t - t_1), \quad (1.4)$$

где $h(\cdot)$ – единичная функция Хевисайда, t_1 – момент времени снятия напряжения σ_k .

В работе в рамках уравнения (1.1) решается задача расчета деформаций обратной ползучести для поливинилхлоридного пластика, ПТФЭ, нейлоновых волокон FM 10001 и для плексигласа, экспериментальные данные, которых заимствованы из [9,10,12,13] соответственно. Задача включает экспериментальное обоснование гипотезы подобия для исследованных материалов, определение параметров входящих в определяющее уравнение и экспериментальную апробацию модели на примере расчета деформаций обратной ползучести.

2. Обоснование существования единой изохронной диаграммы деформирования.

Интегральное определяющее уравнение (1.1) устанавливает связь между деформациями и напряжениями для нелинейно-вязупругих материалов с независимой от времени нелинейностью. Нелинейность процесса ползучести определяется, как видно нелинейностью диаграммы мгновенного деформирования $\varphi_0(\cdot)$ и следует из условия существования единой изохронной диаграммы деформирования. Единая изохронная диаграмма отображает подобие изохронных диаграмм ползучести $\varphi_t(\varepsilon_i(t_j))$ и диаграммы мгновенного деформирования $\varphi_0(\varepsilon_i(0))$.

Обобщенное условие подобия изохронных диаграмм ползучести, включая и диаграмму мгновенного деформирования, как изохрону для момента времени $t=0$, записывается в виде

$$\varphi_0(\varepsilon_i(0)) = [1 + G(t_j)] \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j), \quad (2.1)$$

где $1 + G(t_j)$ ($j = \overline{1, n}$) – функция подобия, которая определяется для каждой изохронной диаграммы ползучести; $\varphi_0(\cdot), \varphi_t(\cdot)$ – значения напряжений, определяемые по изохронным диаграммам ползучести для каждого из моментов времени t_j .

Существование единой изохронной диаграммы деформирования в соответствии из (2.1) может быть обосновано приведением исходных изохронных диаграмм ползучести к диаграмме мгновенного деформирования с помощью усредненной функции подобия $\overline{1 + G(t_j)}$. Величина $\overline{1 + G(t_j)}$ определяется из соотношения

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^l (\varphi_0(\varepsilon_i, 0) \varphi_t(\varepsilon_i, t_j))}{\sum_{i=1}^l (\varphi_t(\varepsilon_i, t_j))^2}, \quad (2.2)$$

с помощью которого рассчитываются дискретные значения усредненной для j -й изохронной диаграммы ползучести функции подобия $1 + G(t_j)$. В связи с статистической природой механических свойств материалов считается, что единая изохронная диаграмма существует с погрешностью δ , если приведенные изохронные диаграммы не выходят за пределы интервала, ограниченного величиной δ по отношению к диаграмме мгновенного деформирования. С достаточной для практических расчетов точностью величина δ принята равной $\pm 5\%$. Существование единой изохронной диаграммы деформирования подтверждается на рис.1 для поливинилхлоридного пластика (а), ПТФЭ (б), нейлоновых волокон FM10001 (в) и плексигласа (г). Исходные изохронные диаграммы ползучести заданные квадратиками, толстыми сплошными линиями показаны диаграммы мгновенного деформирования $\sigma_0(\varepsilon)$. Приведенные к диаграмме мгновенного деформирования с помощью усредненной функции подобия (2.2) исходные изохронные диаграммы ползучести не выходят, как видно за границы интервала, ограниченного величиной погрешности $\delta = \pm 5\%$ (штриховые линии). Дискретные значения приведенных изохронных диаграмм ползучести нанесены квадратиками. Для поливинилхлоридного пластика точки отвечают моментам времени $t_j = 0,32$ (□), 1,23 (▣), 2,77 (▤), 6,07 (▥), 8,49 (▦), 14,24 (▧), 16,67 (▨), 19,69 (▩) часов (а), ПТФЭ точки отвечают моментам времени $t_j = 234$ (□), 1849 (▣), 3106 (▤), 4362 (▥), 6517 (▦), 8491 (▧), 10646 (▨), 13518 (▩) часов (б), для нейлоновых волокон FM 10001 точки отвечают моментам времени $t_j = 0,0105$ (□), 0,111 (▣), 0,261 (▤), 0,371 (▥), 0,841 (▦), 0,894 (▧) (в) часов, для плексигласа точки

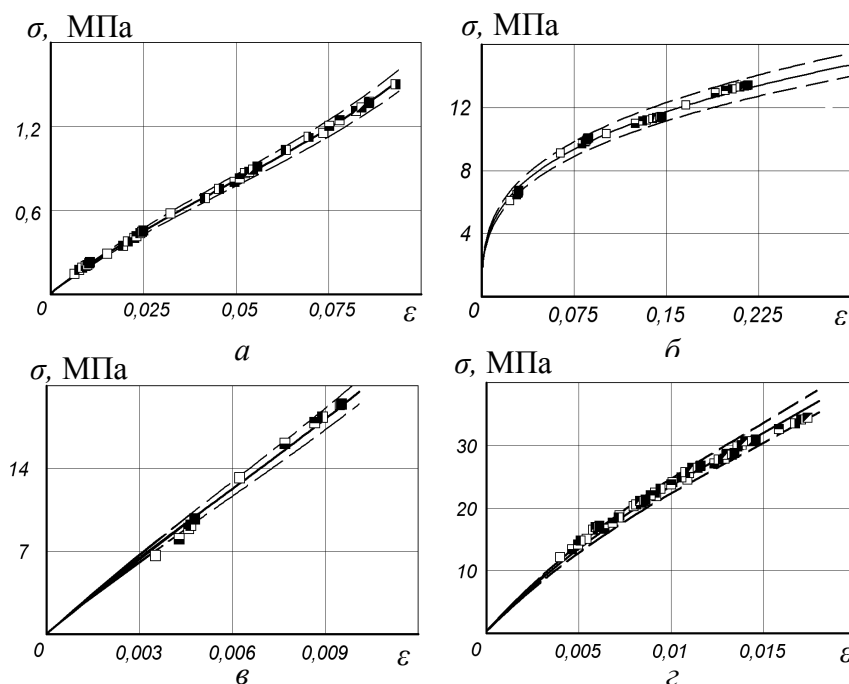


Рис. 1. Расчете значения приведенных изохронных диаграмм ползучести

отвечают моментам времени $t_j = 25$ (□), 183 (▣), 554 (▤), 1233 (▥), 5122 (▦), 6727 (▧), 8394 (▨), 9320 (▩) часов (г).

3. Определение параметров ядра. В работе неизвестные параметры α, β и λ определяются из данных полученных из условия существования единой изохронной диаграммы мгновенного деформирования и представленных в виде усредненной функции подобия $1 + G(t_j)$.

В качестве критерия наилучшего согласования функции подобия (2.2) с экспериментальными данными используется условие минимизации квадратичного отклонения расчетных данных с

экспериментальными данными усредненной функции подобия $\overline{(1 + G(t_j))}_{\text{exp}}$. Задача сводится к нахождению минимума функционала

$$F(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \left\{ \overline{(1 + G(t_j))}_{\text{exp}} - \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha)]} \right]^2 \right\}. \quad (3.1)$$

Минимизация функционала (3.1) осуществляется с использованием итерационного метода Ливенберга-Маркардта [11]. Значение найденных таким образом параметров α , β и λ для исследуемых материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры ядра α , β и λ для исследуемых материалов

В'язкоупругие материалы	Параметры ядра		
	α	$\beta, \text{ч}^{-(1+\alpha)}$	$\lambda, \text{ч}^{-(1+\alpha)}$
Поливинилхлоридный пластикат	-0,632	0,123	0,334
ПТФЭ	-0,632	0,038	0,0123
Нейлон FM 10001	-0,555	0,662	0,873
Плексиглас	-0,591	0,014	0,02

Значения коэффициентов сплайн аппроксимации, которые задают обратную диаграмму мгновенного деформирования в уравнении (1.2) $\phi_0(\cdot)$, приведены в таблице 2.

Таблица 2

Коэффициенты сплайн аппроксимации

Материал	j	$\sigma_j, \text{МПа}$	$\overline{b_0}, \text{МПа}$	$\overline{b_1}, \text{МПа}^{-1}$	$\overline{b_2}, \text{МПа}^{-2}$	$\overline{b_3}, \text{МПа}^{-3}$
Поливинилхлоридный пластикат	0	0	$-3,3785 \cdot 10^{-4}$	0,04536	0,02956	-0,01178
	1	1,2				
ПТФЭ	0	0	0,541667	0,001995	$1,39665 \cdot 10^{-4}$	$1,54 \cdot 10^{-5}$
	1	3,89	-0,0497061	0,040283	$-9,96 \cdot 10^{-4}$	0,000855
	2	5,78	0,187836247	-0,08289	$11,3295 \cdot 10^{-3}$	-0,00037
	3	10				
Нейлон FM 10001	0	0	$8,63 \cdot 10^{-7}$	$4,23445 \cdot 10^{-4}$	$8,09 \cdot 10^{-6}$	$2,3085 \cdot 10^{-7}$
	1	20				
Плексиглас	0	0	$-11 \cdot 10^{-4}$	$3,3088 \cdot 10^{-4}$	$3,88276 \cdot 10^{-9}$	$8,653 \cdot 10^{-9}$
	1	30				

4. Ползучесть при постоянных напряжениях. Простейшая проверка применения дробно-экспоненциального ядра (1.3) и параметров ядра найденных по значениям усредненной функции подобия для решения задач нелинейной теории вязкоупругости может быть осуществлена на примере расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

Условие нагрузки постоянным во времени напряжениями при варьировании величины напряжения σ_k задается соотношением

$$\sigma(t) = \sigma_k h(t) \quad (k = \overline{1, m}), \quad (4.1)$$

где $h(t)$ – единичная функция Хевисайда ($h(t) = 0$ при $t < 0$ и $h(t) = 1$ при $t > 0$), $\sigma_k = \text{const}$.

Решив уравнение (1.1) с учетом (1.2) и (4.1) относительно $\varepsilon(t)$, подставляя ядро ползучести (1.3), получаем уравнение

$$\varepsilon(t) = b_0 + b_1 \left(\sigma_k(t) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) \right) + b_2 \left(\sigma_k(t) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) \right)^2 + b_3 \left(\sigma_k(t) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) \right)^3, \quad (4.2)$$

где принято $\tau = 0$, $t - \tau = t$, а $h(0) = 1$, b_0, b_1, b_2, b_3 – коэффициенты сплайн аппроксимации, которые задают обратную диаграмму мгновенного деформирования.

Значение деформаций ползучести $\varepsilon(t)$ нелинейно-вязкоупругих материалов рассчитанных по уравнению (4.2) с использованием значений параметров α , β и λ , приведенных в таблице 1, сопоставлены на рис.2 из экспериментальными данными для поливинилхлоридного пластиката (а), ПТФЭ (б), нейлоновых волокон (в), плексигласа (г).

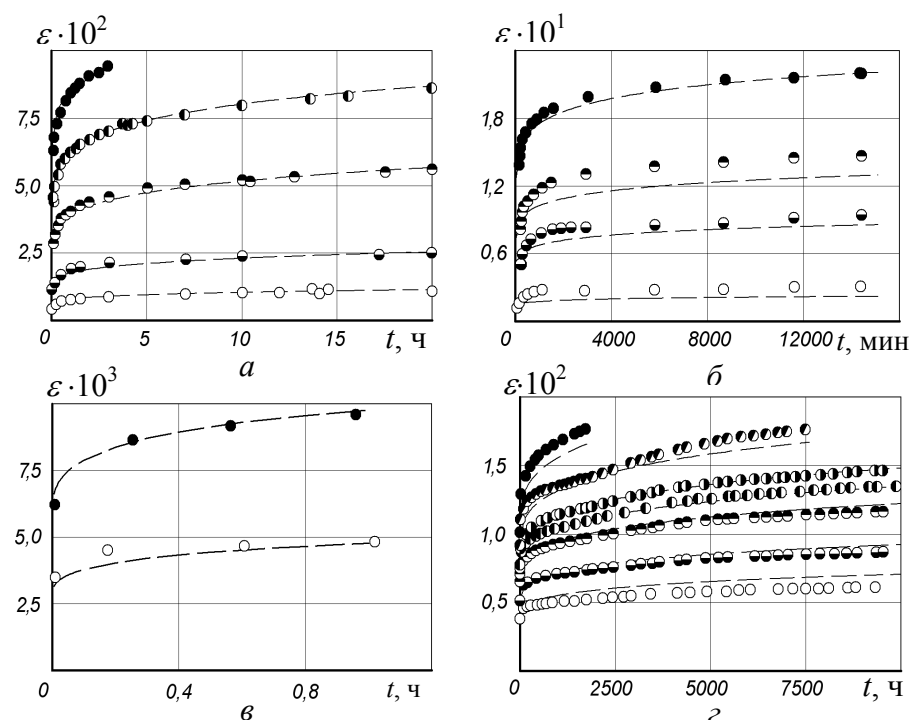


Рис. 2. Исходные экспериментальные данные (точки) и расчетные (штриховые линии) значения деформаций ползучести

Результаты расчета нанесены штриховыми линиями, а экспериментальные данные показанные точками.

Экспериментальные значения ползучести для поливинилхлоридного пластиката получены при напряжениях $\sigma_k = 0,125$ (\circ), $0,25$ (\ominus), $0,5$ (\odot), $0,75$ (\bullet), $1,0$ (\bullet) МПа, ПТФЭ при напряжениях $\sigma_k = 5$ (\circ), $7,5$ (\ominus), $8,5$ (\odot), 10 (\bullet) МПа, нейлоновых волокон FM 10001 при $\sigma_k = 6,2$ (\circ), $12,41$ (\bullet) МПа и для плексигласа при напряжениях $\sigma_k = 11$ (\circ), $13,78$ (\ominus), $17,23$ (\odot), $18,58$ (\bullet), 20 (\bullet), $22,44$ (\bullet), $25,51$ (\bullet) МПа.

Максимальная погрешность между результатами расчета и экспериментальными данными составила 13,8% и получена для ПТФЭ.

5. Обратная ползучесть при полной разгрузке. Процесс обратной ползучести связан с уменьшением во времени деформаций ползучести, накопленной к моменту разгрузки.

Условие нагрузки (1.4) при реализации режима полной разгрузки записывается в виде

$$\sigma(t) = \sigma_1 h(t) - \sigma_1 h(t - t_1), \quad (5.1)$$

где σ_1 – приложенное напряжение, t_1 – момент полной разгрузки, $h(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Решая уравнение (1.1) с учетом (1.2) и (5.1) относительно $\varepsilon(t)$, подставляя ядро ползучести (1.3), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & b_1 \left(\sigma_1 h(t) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) - \sigma_1 h(t-t_1) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) \right)^3 + \\ & + b_2 \left(\sigma_1 h(t) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) - \sigma_1 h(t-t_1) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) \right)^2 + \\ & + b_3 \left(\sigma_1 h(t) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) - \sigma_1 h(t-t_1) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) \right) + b_4 \end{aligned} \quad (5.2)$$

где все обозначения совпадают с принятыми в (1.1), (1.3), (5.1).

Значение деформаций обратной ползучести $\varepsilon(t)$, рассчитанных по уравнению (5.2) с использованием параметров ядра (1.3), приведенных в таблице 1, сопоставлены на рис.3 для поливинилхлоридного пластиката (а), ПТФЭ (б), нейлоновых волокон (в), плексигласа (г).

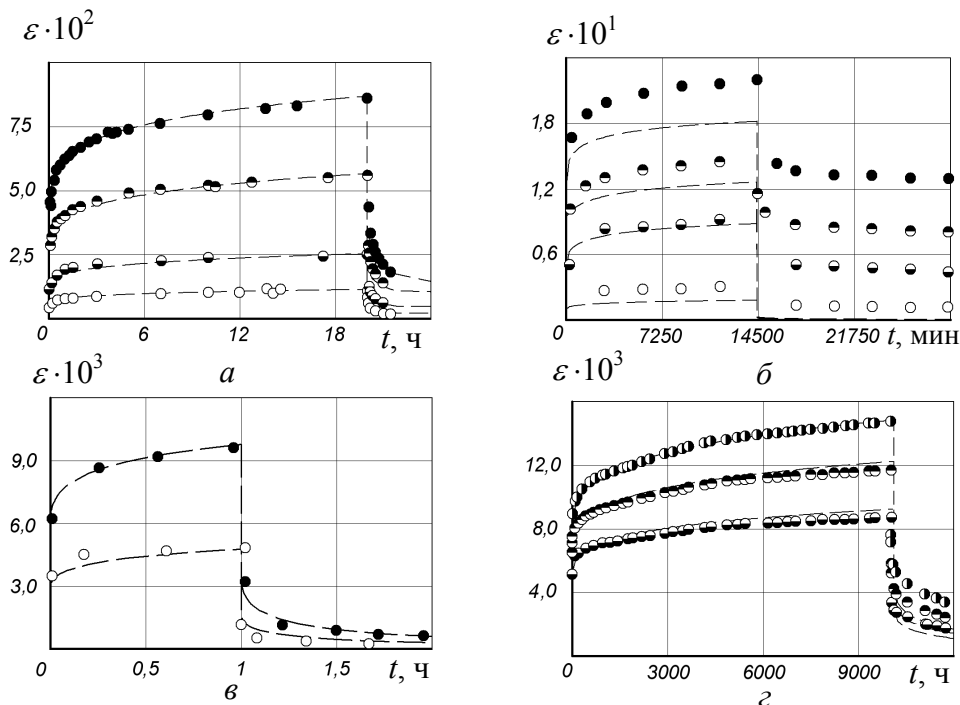


Рис. 3. Исходные экспериментальные данные (точки) и расчетные (штриховые линии) значения деформаций обратной ползучести

Режим нагрузки для поливинилхлоридного пластиката включал нагрузку с начальным напряжением $\sigma_1 = 0,125$ (\circ), $0,25$ (\ominus), $0,5$ (\bullet) и $0,75$ (\bullet) МПа и полную разгрузку в момент времени $t_1 = 20$ часов (а), для ПТФЭ начальным напряжением $\sigma_1 = 5$ (\circ), $7,5$ (\ominus), $8,5$ (\bullet) и 10 (\bullet) (б) и полную разгрузку в момент времени $t_1 = 14400$ минут, для нейлона FM 10001 включал нагрузку с начальным напряжением $\sigma_1 = 6,2$ (\circ), $12,41$ (\bullet) МПа и полную разгрузку в момент времени $t_1 = 1$ час (в) и для плексигласа включал нагрузку с начальным напряжением $\sigma_1 = 13,78$ (\ominus), $17,23$ (\bullet) и 20 (\bullet) МПа и полную разгрузку в момент времени $t_1 = 1020$ часов (г).

В случае ПТФЭ, как видно из рис.3, результаты расчетов с экспериментом не согласуются. Это может объясняться тем, что материал не является вязкоупругим. После разгрузки возникают остаточные деформации, которые нелинейной моделью (1.1) не учитываются.

Выводы. Как видно из результатов расчета на рис.2,3 получено удовлетворительное согласование экспериментальных данных с расчетными. Что подтверждает целесообразность применения нелинейной модели, которая строится на основании гипотезы единой диаграммы деформирования исходя из подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования, для расчета деформаций ползучести при стационарном нагружении и при полной разгрузке. Наибольшая погрешность была получена для ППФЭ в режиме полной разгрузки. Значительная погрешность обусловлена тем, что материал не является вязкоупругим, так как после разгрузки у него возникают остаточные деформации, поэтому при прогнозировании процессов длительного деформирования при нестационарных режимах нагружения, кроме базового эксперимента на ползучесть нужно проводить эксперимент на полную разгрузку для определения, является ли материал вязкоупругим.

Список литературы

1. Кристенсен Р.М. Введение в теорию вязкоупругости. Пер. с англ. под ред. Г.С.Шапиро.- М.: Мир, 1974.- 340 с.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977.- 384 с.
3. Golub V.P, Romanov A.V., Romanova N.V. Nonlinear creep and ductile creep rupture of perfectly elastoplastic rods under tension // International Applied Mechanics.-2008.- vol.44, №9. – pp. 459-470.
4. Ильющин А.А., Победра Б.Е. К вопросу о нелинейной теории вязкоупругости // В сб.: Прочность и пластичность.- М.: Наука, 1971, С. 270-276.
5. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976.- 278с.
6. Колтунов М.А., Николаевский А.С.К вопросу исследования одномерной задачи нелинейной ползучести // Механика полимеров. – 1966. – №5. – С.678-687.
7. Голуб В. П. Длительная нелинейная ползучесть вязкоупругих волокнистых однонаправленных композитов при растяжении // Вісн. Донец. ун-ту. Серія А, Природ. науки. – 2006. – Вип. 1, ч. 1. – С. 97–101.
8. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Фернати П. В. Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 20–34.
9. Marin J., Webber A.C., Weissmann G.F. Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion // Proc. ASTM.- 1954.- Vol. 54, pp.1313-1343.
10. Павлов П.А., Кондакова О.Н., Белан-Гайко В.Н. Ползучесть полиэтилена при плоском напряженном состоянии в условиях нестационарного нагружения // Механика композитных материалов – 1980. – №5. – С.793-801.
11. J.J. More, B.S. Garbow, K.E. Hillstrom, More J.J. Users guide to minipack // Argonne National Laboratory Publication ANL-80-74. – 1980. – 238 p
12. Самарин Ю.П., Сорокин О.В. О ползучести поливинилхлоридного пластика при переменных нагрузках // ДАН СССР – 1970. –Том 195, №2. – сс.333 – 336.
13. Marin J., Pao Yoh-Han On the accuracy of extrapolated creep – test relations for plexiglass subjected to various stresses // Trans. Of the ASME, October, 1952 – vol.74 №7-p.1231-1240.